CHAPITRE 3

EQUATION DE REYNOLDS

1 - INTRODUCTION A LA LUBRIFICATION

La lubrification hydrodynamique est un domaine important de la tribologie, c'est l'étude des contacts dans lesquels un film de fluide sépare les surfaces en présence. Dans le cas où le film de fluide sépare totalement les surfaces, les aspérités et les défauts de forme ont des dimensions inférieures à l'épaisseur du film.

Dans tous les mécanismes étudiés, le problème peut se schématiser de la façon suivante (fig. 1) :

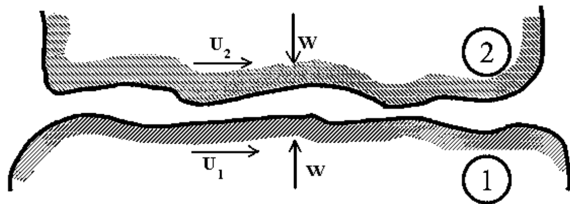


Fig. 1 : Schéma d'un contact lubrifié

Un film de fluide visqueux sépare les deux surfaces du mécanisme ; il s'agit de calculer :

- la charge W que peut supporter le contact,
- la force F ou le couple de frottement $\mathcal{C}$,
- le débit Q du fluide dans le mécanisme,
- la puissance $\mathcal{P}$ dissipée dans le contact.

Ainsi il faut déterminer le champ de pression et le champ de vitesse dans le fluide. Par ailleurs, l'intégration des contraintes de cisaillement aux surfaces du contact donnera la force ou le couple de frottement.

La pression peut être créée par une pompe extérieure au contact c'est l'hydrostatique : c'est le cas par exemple de certains paliers et des glissières de certaines machines outils.

La pression peut être créée par le déplacement relatif des surfaces, c'est l'hydrodynamique : cela concerne les butées, les paliers fluides, les garnitures mécaniques….

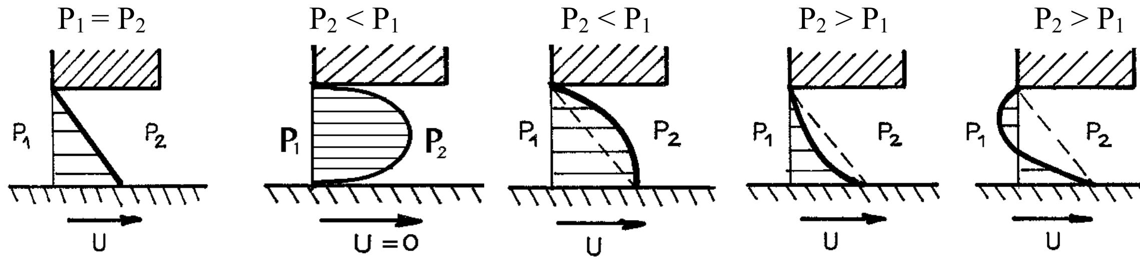
2 – APPROCHE PHYSIQUE DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE

2.1 - TYPES D'ECOULEMENT DANS LE FILM

Considérons, (fig. 2), l'écoulement plan entre deux surfaces entièrement séparées par un fluide visqueux newtonien. Si dans le film lubrifiant, les forces massiques extérieures et les forces d'inertie sont négligeables devant les forces de viscosité et de pression, l'écoulement résulte de la superposition de deux écoulements simples :

- L'écoulement de Couette dû au mouvement des surfaces, (fig. 2a). La variation de vitesse est linéaire suivant l'épaisseur du film.
- L'écoulement de Poiseuille dû à un gradient de pression dp/dx dans le sens de l'écoulement. La variation de vitesse suivant l'épaisseur du film est parabolique, (fig. 2b).

On peut ainsi rencontrer différents cas de figure, selon le signe des vitesses U_1, U_2 et du gradient de pression dp/dx (fig. 2).



a) Ecoulement de Couette — b) Ecoulement de Poiseuille — c) Ecoulements résultants

Fig. 2 : Différents types d'écoulement

2.2 – Explication de la portance dans le coin d'huile

Soient deux plaques planes non parallèles séparées par un film fluide newtonien, (fig. 3). La plaque inférieure est animée d'un mouvement de translation de vitesse U constante.

Dans le cas d'un écoulement unidirectionnel (problème plan) et s'il n'existe pas de variations de pression dans le film, la distribution de vitesse dans le contact est linéaire (écoulement de Couette), fig. 3. Dans ces conditions le débit, pour une largeur L selon oz est :

- A l'entrée $Q_e = \dfrac{L h_e U}{2}$
- A la sortie $Q_s = \dfrac{L h_s U}{2}$

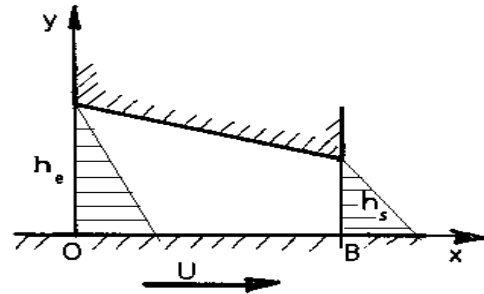


Fig. 3 : Hypothèse ; écoulement de Couette

Pour un fluide incompressible le débit volumique doit être constant. Soit : $Q_e = Q_s$. Ceci est impossible car h_e est différent de h_s. Il y a donc nécessairement génération de pression dans le film. Sous l'action du gradient de pression, le fluide est ralenti à l'entrée et est accéléré à la sortie, (fig. 4) de telle sorte qu'il y ait conservation du débit.

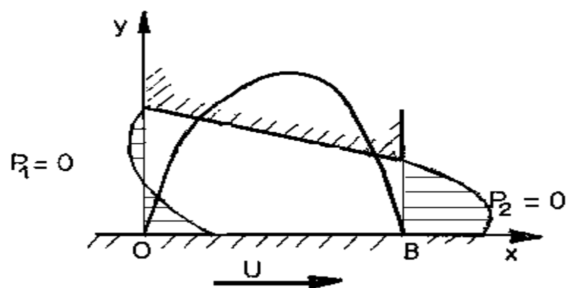


Fig. 4 : Ecoulement dans un coin d'huile

2.3 – Relations elementaires

Considérons deux surfaces planes, (fig. 5) entre lesquelles s'écoule un fluide newtonien. On notera U la vitesse de surface inférieure. L'écoulement est supposé laminaire, permanent, isotherme et unidirectionnel. Etudions l'équilibre d'un parallélépipède élémentaire de côtés dx et dy et de largeur unitaire selon Oz, (fig. 5).

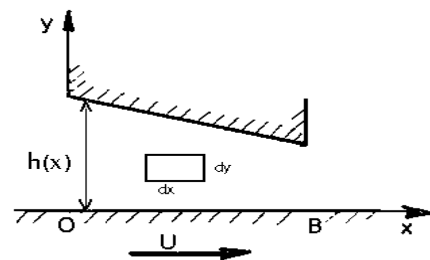


Fig. 5 : Equilibre d'un parallélépipède

Le parallélépipède est sollicité par :
- Les contraintes de pression, si la distance h qui sépare les 2 plans est suffisamment petite et si les variations d'épaisseur du film selon 0x sont faibles, on peut supposer que la pression est constante selon l'épaisseur du film.
- Les contraintes de cisaillement.

La condition d'équilibre s'écrit :

$$\left[p(x) - p(x+dx)\right]dy + \left[\tau_{xy}(y+dy) - \tau_{xy}(y)\right]dx = 0$$

avec d'après la loi de Newton $\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$; où u représente la vitesse du fluide selon 0x et μ sa viscosité supposée constante. Un développement limité au premier ordre permet d'écrire :

$$-\frac{dp}{dx}\,dx\;dy + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\;dy = 0$$

soit

$$\frac{dp}{dx} = \mu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Cette équation est une forme très simplifiée de l'équation de Navier Stokes en écoulement plan. Compte tenu des hypothèses effectuées précédemment la vitesse s'écrit :

$$u = \frac{1}{2\mu}\,\frac{dp}{dx}\,y^2 + C_1\,y + C_2$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes déterminées par les conditions aux limites sur la vitesse. S'il n'y a pas glissement à la paroi on a :

pour $y = 0$, $u = U$

pour $y = h$, $u = 0$

Il vient :

$$u = \frac{1}{2\mu}\,\frac{dp}{dx}\,y(y-h) + \frac{h-y}{h}U$$

Dans une section droite quelconque le débit q(x) par unité de largeur est donné par la relation :

$$q(x) = \frac{Q(x)}{L} = \int_0^{h(x)} u\,dy = -\frac{h^3}{12\mu}\,\frac{dp}{dx} + \frac{hU}{2}$$

Pour un fluide incompressible et un écoulement unidirectionnel le débit q (x) doit être constant. Soit :

$$-\frac{h^3}{12\mu}\frac{dp}{dx}+\frac{hU}{2} = \text{Cste} = \frac{h^*U}{2}$$

où h^* est l'épaisseur du film pour laquelle le gradient de pression s'annule. Soit encore :

$$\frac{dp}{dx} = 6\mu U \frac{h-h^*}{h^3}$$

Cette équation est une forme très simplifiée de l'équation de Reynolds ; elle permet d'étudier des écoulements plans dans le cadre d'hypothèses simples.

3 – EQUATION DE REYNOLDS

3.1 – DERIVATION DE L'EQUATION DE REYNOLDS

Les équations générales de la lubrification hydrodynamique par fluide newtonien prennent différentes formes selon les hypothèses effectuées. Dans ce chapitre, nous démontrons une forme simplifiée de ces équations, appelée équations de Reynolds [1 à 5].

L'équation de Reynolds est déduite des équations de la mécanique des milieux continus, appliquées à un fluide newtonien et qui peuvent s'écrire sous la forme suivante :

- la loi de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0$$

- la loi fondamentale de la dynamique :

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

- la loi de comportement rhéologique, qui pour un fluide newtonien s'écrit :

$$\sigma_{ij} = (-p+\lambda\theta)\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}$$

Dans ces expressions, x_i et t sont les variables d'espace et de temps, u_i les composantes de la vitesse, ρ la masse volumique du fluide, p la pression, f_i les forces massiques extérieures, σ_{ij} le tenseur des contraintes donné par la loi de comportement rhéologique du fluide, δ_{ij} le symbole de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$) et où λ et μ, coefficients de viscosité de Navier, sont des fonctions de l'espace et du temps.

θ, le taux de dilatation cubique s'écrit : $\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}$

ε_{ij}, le tenseur des taux de déformations est donné par : $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

En reportant l'équation de comportement rhéologique dans l'équation de la dynamique et en négligeant les forces massiques extérieures, on obtient les équations de Navier qui s'écrivent :

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\,\partial x_j}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}+\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)+\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}+\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \mu}{\partial x_j}$$

Dans ces relations, i correspond à la direction considérée et j joue le rôle d'indice muet. En lubrification, la dimension suivant l'épaisseur du film $(0,\vec{x}_2)$ est très faible par rapport aux deux autres, ce qui permet, pour déterminer l'ordre de grandeur des différents termes de l'équation de Navier, d'écrire [6] :

$$\overline{x}_1=\frac{x_1}{L}\,,\;\overline{x}_2=\frac{x_2}{H}\,,\;\overline{x}_3=\frac{x_3}{L}\,,\;\overline{t}=\frac{tV}{L}$$

$$\overline{u}_1=\frac{u_1}{V}\,,\;\overline{u}_2=\frac{u_2L}{VH}\,,\;\overline{u}_3=\frac{u_3}{V}$$

$$\overline{\mu}=\frac{\mu}{\mu_0}\quad\text{et}\quad\overline{\lambda}=\frac{\lambda}{\lambda_0}$$

Dans ces expressions L et V sont respectivement la dimension et la vitesse caractéristiques selon les axes $(0,\vec{x}_1)$ et $(0,\vec{x}_3)$, H et $\frac{VH}{L}$ celles suivant $(0,\vec{x}_2)$; $\frac{L}{V}$, μ_0 et λ_0 définissent l'ordre de grandeur du temps et des coefficients de viscosité. Nous supposerons que ces deux coefficients sont du même ordre de grandeur. Ce changement de variable conduit à poser $\overline{p}=p\frac{H^2}{\mu_0 VL}$. Remarquons que la vitesse caractéristique V peut être définie de plusieurs façons ; en hydrodynamique, V sera la vitesse d'une des parois du contact. Si les parois du contact sont immobiles, le contact est hydrostatique, on définit alors la pression sans dimension par $\overline{p}=p/P_s$ où P_s est, par exemple, la pression d'alimentation ; la vitesse caractéristique peut alors s'écrire : $V=\frac{P_sH^2}{\mu_0 L}$.

Ce changement de variable met en évidence les 3 nombres sans dimension suivants :

$\Re=\frac{\rho_0 VH}{\mu_0}$ le nombre de Reynolds relatif à l'épaisseur de l'écoulement,

$\varepsilon=\frac{H}{L}$ le paramètre d'échelle, qui en lubrification est de l'ordre de 10^{-3},

$\frac{\lambda_0}{\mu_0}$ le rapport des coefficients de viscosité, généralement de l'ordre de 1.

Compte tenu de ces changements de variable l'équation s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_1} = \varepsilon\left[-\Re\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_j}\right) + \varepsilon\left(\bar{\mu} + \bar{\lambda}\frac{\lambda_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial}{\partial \bar{x}_1}\left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j}\right) + \varepsilon\bar{\mu}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_3^2}\right)\right]$$

$$+ \bar{\mu}\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_2^2} + \varepsilon^2\left[\frac{\lambda_0}{\mu_0}\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{x}_1}\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} + 2\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_1}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_3}\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_3} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_1}\right)\right] + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2}\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_2} + \varepsilon^2\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_1}\right)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_2} = \varepsilon^2\left\{\begin{array}{l}\varepsilon\left[-\Re\left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_j\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_j}\right) + \varepsilon\bar{\mu}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_3^2}\right)\right] + \left(\bar{\mu} + \bar{\lambda}\frac{\lambda_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial}{\partial \bar{x}_2}\left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j}\right) + \\ \bar{\mu}\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_2^2} + \frac{\lambda_0}{\mu_0}\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{x}_2}\left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j}\right) + 2\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2}\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_2} + \frac{\partial \mu}{\partial \bar{x}_1}\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_2} + \varepsilon^2\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_1}\right) + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_3}\left(\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_2} + \varepsilon^2\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_3}\right)\end{array}\right\}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_3} = \varepsilon\left[-\Re\left(\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_j}\right) + \varepsilon\left(\bar{\mu} + \bar{\lambda}\frac{\lambda_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial}{\partial \bar{x}_3}\left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j}\right) + \varepsilon\bar{\mu}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_3^2}\right)\right]$$

$$+ \bar{\mu}\frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_2^2} + \varepsilon^2\left[\frac{\lambda_0}{\mu_0}\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{x}_3}\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} + 2\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_3}\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_3} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_1}\left(\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_3}\right)\right] + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2}\left(\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_2} + \varepsilon^2\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_3}\right)$$

En négligeant les termes multipliés soit par ε^2, soit par $\varepsilon^3\,\Re$ il vient :

$$\begin{cases}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_i} = -\varepsilon\Re\left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_j\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_j}\right] + \bar{\mu}\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_2^2} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_2}\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \quad \text{(i = 1 et 3)} \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_2} = 0\end{cases}$$

Les termes en $\varepsilon\,\Re$, ou termes d'inertie, de l'équation ci dessus seront négligeables devant les termes de viscosité quand $\varepsilon\,\Re << 1$; ce qui est souvent vérifié dans les écoulements rencontrés en lubrification. En effet, dans le cas du contact d'une bille sur un plan par exemple (représentatif du roulement à billes ou de l'engrenage) :

$$L = 10^{-3}\,\text{m},\quad H = 10^{-6}\,\text{m},\quad V = 10\,\text{m/s},\quad \mu_0 = 0{,}05\,\text{Pa.s},\quad \rho_0 = 900\,\text{kg/m}^3$$
$$\varepsilon\,\Re = 1{,}8\;10^{-4}$$

Dans le cas d'un palier à huile de dimensions moyennes :

$$L = 0{,}05\,\text{m},\quad H = 10^{-4}\,\text{m},\quad V = 30\,\text{m/s},\quad \mu_0 = 0{,}05\,\text{Pa.s},\quad \rho_0 = 900\,\text{kg/m}^3$$
$$\varepsilon\,\Re = 1{,}08\;10^{-2}$$

Des exceptions se rencontrent toutefois quand la viscosité du fluide est faible, quand l'épaisseur du film est importante ou pour les paliers de grandes dimensions. Ainsi pour le palier précédant mais lubrifié avec de l'eau on aura :

$$\mu_0 = 1\,\text{m Pa.s} \qquad \text{et} \qquad \rho_0 = 1000\,\text{kg/m}^3$$

$$\varepsilon\Re = 0{,}6$$

De même pour un palier de grandes dimensions tel que ceux supportant les lignes d'arbre des centrales électriques modernes.

$$L = 0{,}5\text{ m}, \quad H = 10^{-3}\text{ m}, \quad V = 100\text{ m/s}, \quad \mu = 0{,}05\text{ Pas} \quad \rho = 900\text{ kg/m}^3$$

$$\varepsilon\Re = 3{,}6$$

Dans ces cas les forces d'inertie ne sont plus négligeables. Ce problème sera abordé ultérieurement. Si par hypothèse on néglige les forces d'inertie il vient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_i} = \bar{\mu}\dfrac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_2^2} + \dfrac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_2}\dfrac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \qquad (i = 1 \text{ et } 3) \\ \dfrac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_2} = 0 \end{cases}$$

et en revenant aux variables dimensionnées en coordonnées cartésiennes (0 x y z) :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

Pour obtenir le champ de vitesse, il faut intégrer. Si μ est indépendant de y, il vient :

$$\mu\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x}y + A$$

$$\mu\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z}y + C$$

soit :

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}y^2 + \frac{A}{\mu}y + B$$

$$w = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial z}y^2 + \frac{C}{\mu}y + D$$

Les conditions aux limites sur la vitesse permettent de déterminer A, B, C et D. Si l'on suppose qu'il n'y a pas de glissement du fluide aux parois, elles s'écrivent, (fig; 6) :

$$\begin{cases} y = 0 \qquad u = U_1\,; \quad v = 0 \qquad \text{et} \quad w = W_1 \\ y = h \qquad u = U_2\,; \quad v = V_2 \qquad \text{et} \quad w = W_2 \end{cases}$$

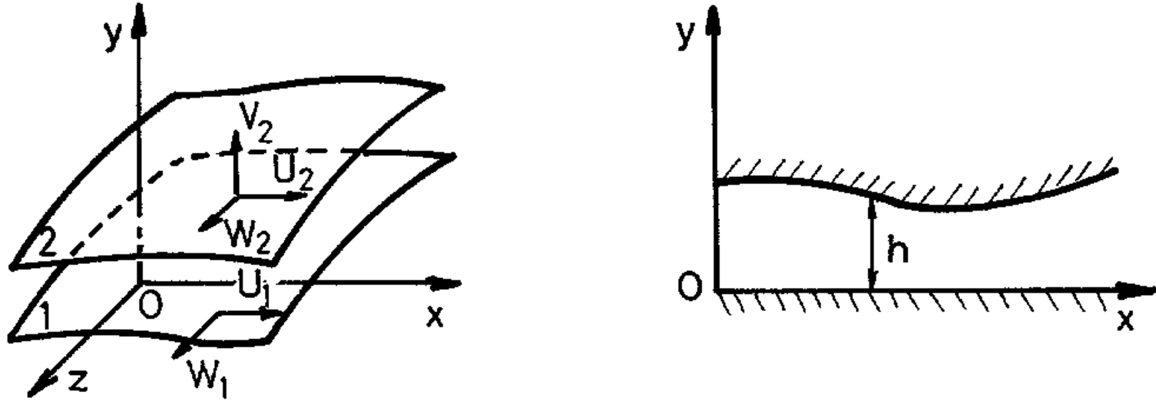


Fig. 6 : Système d'axes en coordonnées cartésiennes

On a donc :

$$U_1 = B$$
$$U_2 = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}h^2 + \frac{A}{\mu}h + B$$

soit :

$$\frac{A}{\mu} = \frac{U_2 - U_1}{h} - \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}h$$

il vient alors :

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}y(y-h) + \frac{U_2 - U_1}{h}y + U_1$$

de même pour w :

$$w = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial z}y(y-h) + \frac{W_2 - W_1}{h}y + W_1$$

En reportant ces vitesses dans l'équation de continuité et en intégrant à travers l'épaisseur du film l'inconnue v disparaît. En effet, l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

en intégrant, on obtient :

$$\int_0^h \frac{\partial \rho}{\partial t}dy + \int_0^h \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)dy + \int_0^h \frac{\partial}{\partial y}(\rho v)dy + \int_0^h \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)dy = 0$$

Il vient ainsi :

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial y}(\rho v)dy = \left[\rho v\right]_0^h = \rho V_2 \text{ car } V_1 = 0 \text{ par hypothèse.}$$

Par ailleurs, si ρ n'est pas fonction de y, on peut écrire :

$$\int_0^h \frac{\partial \rho}{\partial t} dy = \frac{\partial \rho}{\partial t}\int_0^h dy = h\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Pour intégrer les deux autres termes, il faut intervertir les signes dérivés et sommes en remarquant que :

$$\int_0^{h(x,z,t)} \frac{\partial F(x,y,z,t)}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{h(x,z,t)} F(x,y,z,t)\,dy - F(x,h,z,t)\frac{\partial h}{\partial x}$$

Soit

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\,dy = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^h \rho u\,dy - \rho U_2 \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\,dy = \frac{\partial}{\partial z}\int_0^h \rho w\,dy - \rho W_2 \frac{\partial h}{\partial z}$$

Ces deux intégrales se calculent en utilisant les expressions donnant les vitesses dans le film. On a ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^h \left[\frac{\rho}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} y(y-h) + \rho\frac{U_2 - U_1}{h} y + \rho U_1\right] dy =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\rho h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + \rho\frac{U_2 - U_1}{2} h + \rho U_1 h\right]$$

soit encore :

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^h \rho u\,dy = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{U_2 + U_1}{2} h\right)$$

de même :

$$\frac{\partial}{\partial z}\int_0^h \rho w\,dy = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{W_2 + W_1}{2} h\right)$$

et en regroupant tous les termes il vient :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho (U_2 + U_1) h}{2}\right) - \rho U_2 \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho (W_2 + W_1) h}{2}\right) - \rho W_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \rho V_2 + h\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

soit encore :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\right)=6\rho(U_1-U_2)\frac{\partial h}{\partial x}+6\rho(W_1-W_2)\frac{\partial h}{\partial z}$$

$$+6h\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho(U_1+U_2)\right]+6h\frac{\partial}{\partial z}\left[\rho(W_1+W_2)\right]+12\rho V_2+12h\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

A cette équation, dite équation de Reynolds, s'ajoutent les équations donnant les vitesses dans le fluide :

$$\begin{cases} u=\dfrac{1}{2\mu}\dfrac{\partial p}{\partial x}\,y(y-h)+\dfrac{h-y}{h}U_1+\dfrac{y}{h}U_2 \\ w=\dfrac{1}{2\mu}\dfrac{\partial p}{\partial z}\,y(y-h)+\dfrac{h-y}{h}W_1+\dfrac{z}{h}W_2 \end{cases}$$

Ainsi que les contraintes de cisaillement dans le fluide :

$$\begin{cases} \tau_{xy}=\mu\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial p}{\partial x}\,(2y-h)+(U_2-U_1)\dfrac{\mu}{h} \\ \tau_{yz}=\mu\dfrac{\partial w}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial p}{\partial z}\,(2y-h)+(W_2-W_1)\dfrac{\mu}{h} \end{cases}$$

En coordonnées cylindriques, (fig. 7) une démarche analogue permet d'obtenir les équations suivantes. Dans ce système d'axes (O r, θ, z) les vitesses du fluide sur les surfaces du contact s'écrivent :

$$\begin{cases} z=0 \quad u=U_1\ ; \quad v=V_1 \quad \text{et} \quad w=0 \\ z=h \quad u=U_2\ ; \quad v=V_2 \quad \text{et} \quad w=W_2 \end{cases}$$

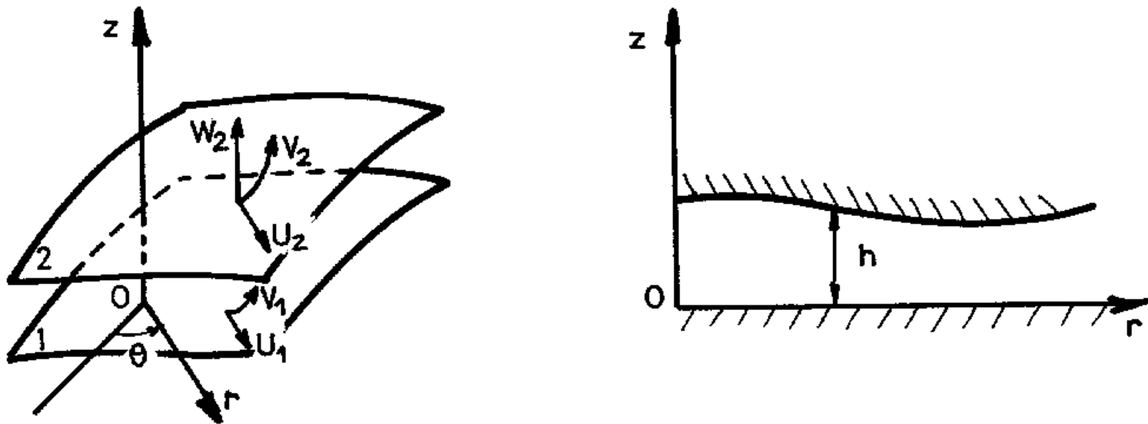


Fig. 7 : Système d'axes en coordonnées cylindriques

L'équation de Reynolds en coordonnées cylindriques est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho r h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\rho h^3}{\mu r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)=6 r \rho (U_1-U_2)\frac{\partial h}{\partial r}+6\rho (V_1-V_2)\frac{\partial h}{\partial \theta}+$$

$$+6 r h\frac{\partial}{\partial r}\left[\rho (U_1+U_2)\right]+6 h\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\rho (V_1+V_2)\right]+$$

$$+6\rho h (U_1+U_2)+12\rho r W_2+12 r h\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Les composantes de la vitesse dans le film s'écrivent :

$$u=\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial r}z(z-h)+\frac{h-z}{h}U_1+\frac{z}{h}U_2$$

$$v=\frac{1}{2\mu r}\frac{\partial p}{\partial \theta}z(z-h)+\frac{h-z}{h}V_1+\frac{z}{h}V_2$$

Les contraintes de cisaillement dans le film sont :

$$\tau_{rz}=\mu\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial r}(2z-h)+(U_2-U_1)\frac{\mu}{h}$$

$$\tau_{\theta z}=\mu\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{1}{2r}\frac{\partial p}{\partial \theta}(2z-h)+(V_2-V_1)\frac{\mu}{h}$$

3.2 – HYPOTHESES ASSOCIEES A L'EQUATION DE REYNOLDS ET DISCUSSIONS

L'équation de Reynolds à laquelle, pour les fluides compressibles, doit être ajoutée l'équation d'état du fluide, permet de décrire l'écoulement laminaire d'un fluide entre deux parois très rapprochées l'une de l'autre et pouvant être en mouvement. Pour obtenir cette équation, il a été nécessaire de poser que :

1) L'épaisseur du film est très faible devant les autres dimensions du contact, c'est l'hypothèse fondamentale de la lubrification hydrodynamique.
2) Le milieu est continu, l'équation de Reynolds ne s'applique pas dans les zones où il a rupture du film.
3) Le fluide est newtonien : il y a proportionnalité entre le taux de cisaillement et les contraintes de cisaillement dans le film.
4) Le régime est laminaire ; en régime non laminaire il faudra utiliser une autre modélisation.
5) L'une des surfaces du contact est parfaitement plane et ne présente pas de rugosité, ce qui permet de placer l'origine des axes sur cette surface. Ainsi, la courbure générale du film est négligée.
6) Il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois du contact : la vitesse du fluide à la paroi est égale à celle de la paroi.
7) Les forces d'inertie sont négligeables ce qui peut ne pas être toujours vérifié.
8) Les forces massiques extérieures sont négligées.
9) La viscosité et la masse volumique du fluide ne varient pas à travers l'épaisseur du film.

10) Ceci revient à poser que la température ne varie pas à travers l'épaisseur du film : $T = T(x_1, x_3, t)$ car $\mu(T, p)$ et $\rho(T, p)$ ne sont fonction que de la température et de la pression.

Ces hypothèses sont assez restrictives mais il existe des formes plus générales de l'équation de Reynolds [1] qui s'affranchissent des hypothèses 4, 5, 9 et10.

L'équation de Reynolds est assez générale, elle s'applique à différents lubrifiants et à différents types de contact. On peut distinguer :

- Fluide compressible et fluide incompressible, dans ce dernier cas la masse volumique disparaît de l'équation de Reynolds.
- Fluide de viscosité variable et fluide de viscosité constante ; il faut noter que pour un fluide de viscosité variable, la viscosité ne varie pas à travers l'épaisseur du film.
- Régime transitoire et régime permanent : on définit en mécanique des films minces visqueux le régime permanent comme un régime de fonctionnement tel que dans un repère particulier, mobile ou non, les vitesses des parois et les paramètres géométriques du contact sont indépendants du temps. L'équation de Reynolds permet de différencier ces deux régimes : en régime permanent le terme $12\frac{\partial \rho h}{\partial t}$ est nul et les vitesses et les dimensions du contact sont, pour un repère particulier, indépendantes du temps.

- Contact hydrodynamique et contact hydrostatique : la terminologie étant assez imprécise nous conviendrons d'appeler contacts hydrostatiques les seuls contacts pour lesquels l'équation de Reynolds se réduit à :

  Coordonnée cartésiennes :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 0$$

  Coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho r h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\rho h^3}{\mu r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\right) = 0$$

Remarquons que ces équations aux dérivées partielles admettent une solution non triviale si et seulement si la pression p n'est pas nulle en tous points de la frontière du domaine d'intégration ce qui impose l'existence d'une source de pression extérieure au contact.

3.3 – Remarque importante sur les vitesses des surfaces

Le deuxième membre de l'équation de Reynolds, introduit la différence des composantes des vitesses des surfaces ; elles s'écrivent :

- en coordonnées cartésiennes, $U_1 - U_2$ et $W_1 - W_2$ respectivement selon x et z ;
- en coordonnées cylindriques, $U_1 - U_2$ et $V_1 - V_2$ respectivement selon θ et r .

Il serait faux d'en conclure que c'est la vitesse de glissement qui crée la portance dans le film. En effet en régime isotherme, la charge est directement proportionnelle à la somme des vitesses tangentielles des surfaces (vitesse de roulement). Cette contradiction apparente provient de la vitesse de la surface 2 dans la direction normale au contact (V_2 en coordonnées cartésiennes et W_2 en coordonnées cylindriques) qui contient des termes de la forme :

$$U_2 \frac{\partial h}{\partial x}, \; W_2 \frac{\partial h}{\partial z} \qquad \text{ou} \qquad U_2 \frac{\partial h}{\partial r}, \; V_2 \frac{\partial h}{\partial \theta}$$

L'exemple du contact formé d'un cylindre tournant autour de son axe , à la vitesse angulaire ω, en regard d'un plan se déplaçant parallèlement à lui même, à la vitesse U, illustre ce problème (fig. 8).

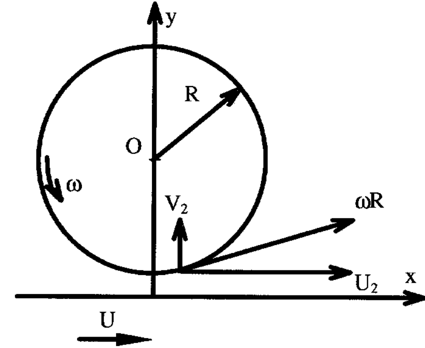


Fig. 8 : Contact cylindre plan

Dans le cas d'un écoulement incompressible, bidimensionnel, l'équation de Reynolds se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 6(U_1 - U_2)\frac{\partial h}{\partial x} + 12 V_2$$

Dans le système d'axes choisi, la vitesse des surfaces s'écrit :

$$U_1 = U$$
$$U_2 = \omega R \cos\alpha$$
$$V_2 = \omega R \sin\alpha$$

Dans la zone de contact, l'angle α, donné par $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\partial h}{\partial x}$ est très petit (de l'ordre de 10^{-3}) et il vient :

$$\mathrm{tg}\,\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha \approx \frac{\partial h}{\partial x}$$
$$\cos\alpha \approx 1$$

soit

$$U_2 = \omega R \;\text{ et }\; V_2 = \omega R \frac{\partial h}{\partial x}$$

Ainsi l'équation de Reynolds est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 6(U + \omega R)\frac{\partial h}{\partial x}$$

Le second membre de l'équation de Reynolds est proportionnel à $U + \omega R$ (vitesse de roulement) et c'est la somme des vitesses tangentielles du contact qui génère la portance dans

le film. Ainsi, même en régime stationnaire, la vitesse d'écrasement respectivement V_2 et W_2 selon le système de coordonnées, joue un rôle très important.

4 – CONDITIONS AUX LIMITES DANS LE CAS DE SURFACES LISSES

Dans ce paragraphe, nous ne traiterons que le cas des fluides incompressibles. On se propose de résoudre l'équation de Reynolds sur un domaine Ω (fig. 8) pour des conditions aux limites portant sur la pression et le débit volumique (ou sur le gradient de pression) :

$$p = p_0 \text{ sur } \Gamma_1$$

$$\vec{n} \cdot \left[\vec{U}\frac{h}{2} - \frac{h^3}{12\mu}\overrightarrow{\text{grad}}\, p \right] = q \text{ sur } \Gamma_2$$

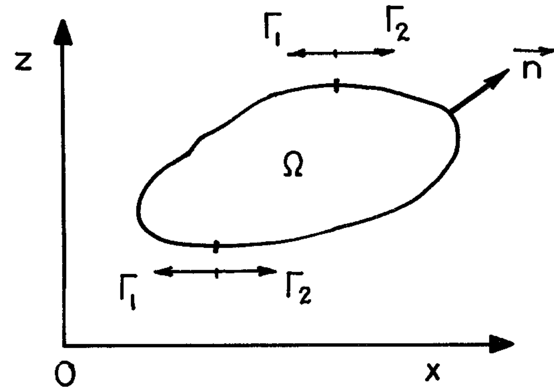


Fig. 9 : Domaine d'intégration

où $\vec{n}$ est le vecteur normal unitaire, q le débit normal par unité de largeur et $\vec{U}$ le vecteur vitesse de composantes $U_1 + U_2$ et $W_1 + W_2$.

4.1 – APPROCHE PHYSIQUE DU PROBLEME DE LA RUPTURE DU FILM LUBRIFIANT

Selon la nature physique du problème étudié (géométrie, cinématique,…) la pression calculée à partir de l'équation de Reynolds et des conditions aux limites peut être, en certains points de Ω, inférieure à la pression atmosphérique. Ces dépressions vont entraîner une rupture du film selon trois processus possibles [7] :

a) de l'air, ou du gaz, en provenance de l'atmosphère ambiante s'introduit dans la région en dépression jusqu'à ce que la pression dans cette zone devienne égale à la pression ambiante,
b) les gaz dissous dans le lubrifiant sont expulsés de celui-ci jusqu'à ce que la pression équilibre la pression de saturation,
c) si la pression est inférieure à la pression de vapeur, il y a vaporisation à la température ambiante sous pression réduite et génération de bulles de vapeur qui peuvent imploser et entraîner une détérioration des surfaces,

La troisième situation c), fréquemment rencontrée dans les machines hydrauliques (aubages de turbine, hélice de bateau…), existe aussi en lubrification en particulier dans les paliers de bielle de moteur diesel, mais on observe plus couramment les deux premiers processus a) et b). Les études expérimentales montrent que dans la zone de rupture, la pression est constante et égale ou légèrement inférieure à la pression atmosphérique car le lubrifiant étant souvent en contact avec l'extérieur, la pression atmosphérique et la pression de vapeur saturante sont voisines. Il est important de noter que la rupture du film lubrifiant n'a pas nécessairement un effet néfaste, au contraire on remarquera qu'une butée symétrique, telle que celle représentée sur la figure 10 ne peut supporter une charge verticale que si il y a rupture du film d'huile. De même un palier lisse cylindrique dans lequel il n'y aurait pas rupture du film lubrifiant serait toujours instable du point de vue vibratoire.

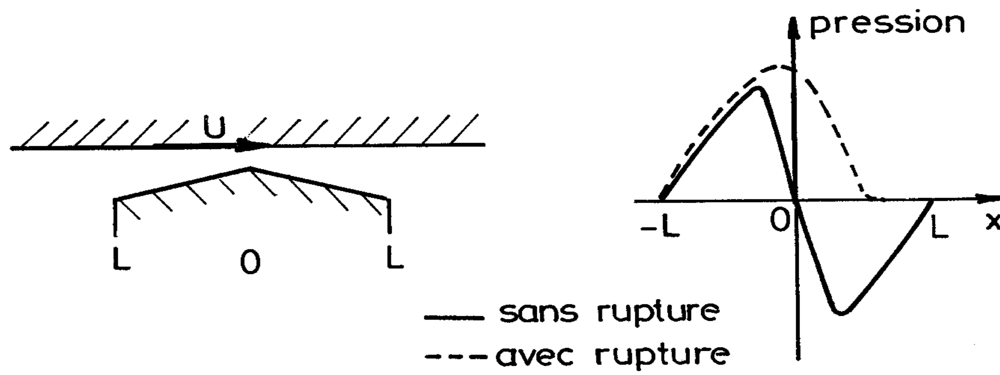


Fig. 10 : Butée hydrodynamique symétrique

Selon la forme du contact et sa cinématique, les visualisations d'écoulement mettent en évidence, dans la zone de rupture, soit une juxtaposition de filets d'air et de lubrifiant (paliers lisses par exemple [8]) soit des bulles (contact sphère-plan en écrasement [9]). Cette région de rupture est souvent désignée par le vocable, impropre, de zone de cavitation.

4.2 – Conditions aux limites pour la zone de rupture

Lorsque la pression est donnée sur la frontière de Ω, une condition suffisante pour qu'il n'y ait pas rupture du film lubrifiant est que le second membre de l'équation de Reynolds reste négatif en tout point de Ω. Dans le cas contraire, il peut y avoir rupture. Ceci est couramment observé dans les paliers lisses en régime permanent [8] où la géométrie du film est convergente puis divergente. Dans ce paragraphe, nous supposerons qu'il y a rupture mais également reformation du film lubrifiant sur Ω. La définition de ces conditions et leur prise en compte dans les modèles de calcul est toujours un sujet de recherche. Il apparaît que la modélisation la plus fine est celle qui découle des travaux de Floberg [10 à 12], Elrod et Adams [13], et Bayada [14]. Le domaine d'intégration Ω est divisé en deux régions. Une région Ω° où le film est rompu et la pression constante, celle-ci est prise comme référence, et un domaine Ω^+ où il y a génération de pression $(p > o)$. Σ^- et Σ^+ représentent respectivement les frontières où il y a reconstitution et rupture du film lubrifiant (fig. 11). Elrod suppose que la région Ω° où le film est rompu est non seulement déterminée par la condition $p = o$, mais introduit un paramètre $\beta(x,z)$ qui représente le pourcentage de lubrifiant contenu dans le volume élémentaire de hauteur h qui entoure le point M :

$$\begin{cases} M \in \Omega^\circ & \leftrightarrow \quad \beta(x,z) < 1 \quad \text{et} \quad p(x,z) = o \\ M \in \Omega^+ & \leftrightarrow \quad \beta(x,z) = 1 \quad \text{et} \quad p(x,z) > o \end{cases}$$

Il suppose en outre que dans la région Ω° le fluide peut être considéré comme un milieu homogène, les surfaces Σ^- et Σ^+ représentent des surfaces de discontinuité pour la pression et la fonction $\beta(x,z)$. L'équation de continuité est valable en tout point de Ω° et Ω^+ et il y a conservation du débit massique à travers les surfaces de discontinuité Σ^- et Σ^+ [15].

a) Domaine Ω^+

L'intégration de l'équation de continuité au travers de l'épaisseur du film lubrifiant donne l'équation de Reynolds.

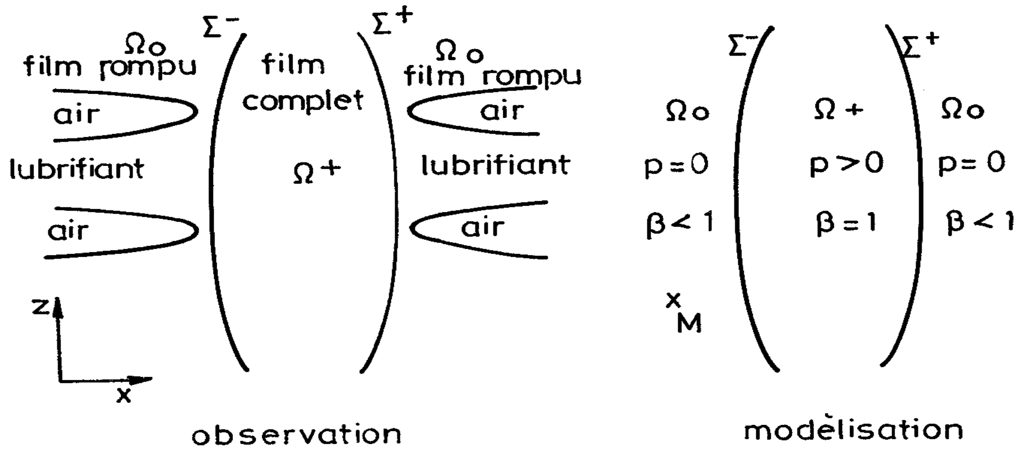


Fig. 11 : Représentation du film lubrifiant

b) Domaine $\Omega°$

L'intégration de l'équation de continuité au travers de l'épaisseur h, compte tenu que la pression est nulle dans cette région et qu'un volume élémentaire ne contient que le pourcentage β de fluide, permet d'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho\beta(U_1+U_2)h\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\rho\beta(W_1+W_2)h\right]=2\rho\beta\left[U_2\frac{\partial h}{\partial x}+W_2\frac{\partial h}{\partial z}-V_2\right]+h\frac{\partial\rho\beta}{\partial t}$$

L'équation ci dessus peut aussi s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho\beta(U_1+U_2)h\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\rho\beta(W_1+W_2)h\right]=2\frac{\partial}{\partial t}(\rho\beta h)$$

c) Le long des interfaces Σ^- et Σ^+

On écrit la conservation du débit massique élémentaire :

$$\left[\rho\beta V_n\right]=0$$

où $\left[f(M)\right]$ désigne le saut subi par la grandeur f lorsque l'on traverse la frontière Σ en un point M dans le sens défini par la normal $\vec{n}$ [15]. V_n représente la projection sur la normal $\vec{n}$ de la vitesse relative $\vec{V}$ du milieu par rapport à la frontière Σ. On a la relation :

$$\vec{U}=\vec{V}+\vec{W}$$

où $\vec{W}$ désigne le champ des vitesses de Σ dans son mouvement propre. L'équation de conservation de débit peut donc également s'écrire :

$$\int_0^h \rho\beta\ \vec{U}.\vec{n}\,dy=\int_0^h \rho\beta\ \vec{W}.\vec{n}\,dy$$

soit encore, si U_n et W_n représentent respectivement la projection sur la normale des vitesses $\vec{U}$ et $\vec{W}$ et si $\partial p / \partial n$ est le gradient de pression dans la direction normale à la frontière :

$$\rho\beta \frac{U_n h}{2} - \rho \frac{U_n h}{2} + \rho \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial n} = \rho\beta W_n h - \rho W_n h$$

c'est à dire :

$$\rho h (\beta - 1) \left(\frac{U_n}{2} - W_n \right) + \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial n} = 0$$

Selon les valeurs respectives de U_n et W_n plusieurs cas peuvent être envisagés. Nous ne considérons ici que le cas du régime permanent pour lequel des algorithmes de calcul ont été proposés [13, 14]. Les surfaces Σ^- et Σ^+ sont alors fixes $(W_n = 0)$ et l'équation ci dessus s'écrit :

$$\rho h (\beta - 1) \frac{U_n}{2} + \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial n} = 0$$

Cette équation permet de déterminer les conditions limites le long des frontières Σ :

a) à la reconstitution, le long de Σ^-, comme le gradient de pression est positif, la relation ci dessus montre qu'il y a discontinuité dans la fonction $\beta(x, z)$ et dans le gradient de pression normale,

b) à la rupture du film, le long de Σ^+, le gradient de pression étant négatif, la relation précédente montre que celui-ci doit être nul et la fonction β égale à l'unité.

Le lieu des interfaces Σ est déterminé au cours de la résolution ; d'un point de vue mathématique, nous sommes en présence d'un problème à frontière libre.

5 – ALGORITHMES DE RESOLUTION

Le régime d'écoulement est supposé être permanent et l'on envisage successivement les cas sans et avec rupture du film lubrifiant. Il est évident qu'en plus des conditions géométriques et cinématiques, la pression dans les rainures, où les alvéoles d'alimentation ainsi que la pression ambiante conditionnent l'existence ou non d'un film complet.

5.1. – CAS D'UN FILM COMPLET

Lorsque le film est complet, le comportement du lubrifiant peut être déterminé en résolvant l'équation de Reynolds ou en minimisant une fonctionnelle [16]. Ce sont ces deux points de vue qui sont abordés dans la suite de ce paragraphe. Mis à part les cas unidimensionnels, il n'existe que très rarement des solutions analytiques. Remarquons toutefois que le problème est linéaire, et qu'il est possible de superposer les solutions.

5.1.a - Résolution de l'équation de Reynolds

Dans ce cas, l'équation de Reynolds est une équation linéaire aux dérivées partielles, de type elliptique. La méthode numérique la plus fréquemment utilisée est la méthode des différences finies. Cette technique, déjà ancienne, de mise en œuvre simple, permet de résoudre la quasi-totalité des problèmes hydrodynamiques et hydrostatiques. Elle est très largement développée dans la littérature tant du point de vue mathématique que du point de vue de son utilisation. Le système linéaire formé par les équations aux différences peut être résolu par des méthodes directes (méthode de Gauss par exemple[17]) ou par des méthodes itératives [18]. Toutefois, la matrice des coefficients étant une matrice « creuse » non symétrique de rang très élevé, les méthodes itératives sont généralement préférables. Une des plus utilisée est la méthode des surrelaxations successives (S.O.R), où méthode de Gauss-Seidel extrapolée. Cependant, le choix du coefficient de surrelaxation optimal, c'est-à-dire celui qui permet d'obtenir une précision donnée en un nombre minimal d'itérations, n'est pas une chose aisée. Certains auteurs proposent des relations empiriques basées sur les résultats théoriques obtenus pour des configurations plus simples. Citons par exemple Servaes [19] :

$$\Omega_0 = 2 - \sqrt{2}\,\pi\sqrt{\frac{1}{M^2} + \frac{1}{N^2}}$$

où M et N représentent le nombre de points retenus pour la discrétisation. Dans la majorité des problèmes de lubrification, ce coefficient est compris entre 1,40 et 1,90 [20].

5.1.b - Formulation intégrale

De par sa structure, l'équation de Reynolds, pour un fluide incompressible, est semblable aux équations de champ qui gouvernent beaucoup de problèmes physiques. A ce titre, elle peut donc être considérée comme l'équation d'Euler-Lagrange d'une certaine fonctionnelle J(p). Le problème a donc une nouvelle formulation : la minimisation d'une fonctionnelle. Celle-ci peut être obtenue soit à partir du calcul des variations, soit en utilisant le théorème d'Helmotz et Korteweg [16]. La fonctionnelle associée à l'équation de Reynolds et pour les conditions aux limites de Reynolds s'écrit :

$$J(p) = \iint_\Omega \left\{ \frac{-h^3}{12\mu}(\nabla p)^2 + h\vec{U}\,\mathrm{grad}\,p + 2p\left(U_2\frac{\partial h}{\partial x} + W_2\frac{\partial h}{\partial z} - V_2\right) \right\} ds - 2\int_{\Gamma_2} q\,p\,d\ell$$

soit encore, compte tenu que :

$$V_2 = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + U_2\frac{\partial h}{\partial x} + W_2\frac{\partial h}{\partial z}$$

$$J(p) = \iint_\Omega \left\{ -\frac{h^3}{12\mu}(\nabla p)^2 + h\,\vec{U}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p - 2p\frac{\partial h}{\partial t} \right\} ds - 2\int_{\Gamma_2} pq\,d\ell$$

Cette approche variationnelle est très restrictive car elle nécessite la connaissance d'une grandeur qui doit être extrémale. Comme on ne possède pas toujours de référence physique pour construire la fonctionnelle, il a été proposé différentes approches qui, pour une équation aux dérivées partielles donnée, permettent de construire une forme intégrale (ceci est

parfois appelé : formulation de type projectif). La plus connue est la méthode de Galerkin. A titre d'exemple nous allons très brièvement développer le cas précédent.

L'équation de Reynolds peut s'écrire : $L(p) = f(x,z)$

où L est un opérateur et f le second membre. On recherche l'ensemble des fonctions $p(x,z)$ qui satisfont les conditions aux limites et le problème différentiel ; c'est-à-dire telles que le résidu soit nul :

$$W(p) = \int_{\Omega} \phi.\left[L(p) - f\right] ds = 0 \qquad \forall\ \phi\ (x,z)$$

Une intégration par parties permet de réduire l'ordre de dérivabilité de $p(x,z)$ (formulation faible), donc d'imposer des conditions moins strictes sur les solutions admissibles. Si on choisit comme fonction de pondération $\phi(x,z)$ la variation virtuelle δp, on obtient :

$$W(p) = \int_{\Omega} \left\{ -\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta p) - \frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}(\delta p) + h\vec{U}.\overrightarrow{grad}(\delta p) - 2\frac{\partial h}{\partial t}(\delta p) \right\} ds - 2\int_{\Gamma_2} q\,\delta p\,d\ell$$

On notera que cette forme est identique à celle obtenue précédemment à partir du calcul des variations ; mais elle a été obtenue indépendamment de la connaissance d'une quantité physique à rendre extrémale. Cette approche a été utilisée pour résoudre les problèmes de lubrification en régime hybride [21].

L'obtention d'une solution est aussi difficile à partir d'une formulation intégrale que d'une formulation différentielle. La difficulté peut être surmontée en recherchant une solution approchée sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions indépendantes dont la manipulation mathématique ne pose pas de difficultés majeures. La méthode la plus fréquemment utilisée est la méthode des éléments finis. Cette méthode, mise en place à l'origine vers les années 1950 pour résoudre les problèmes de mécanique des structures, est de plus en plus utilisée en lubrification [16, 21 à 26]. Son utilisation pour la résolution des problèmes en mécanique des films minces visqueux offre les mêmes avantages et désavantages, que dans les autres types d'applications. Elle permet principalement grâce à la souplesse dans le maillage, de traiter le cas de géométrie au contour complexe et de prendre en compte des discontinuités dans la géométrie du film ou dans les propriétés physiques du fluide. Ses deux points faibles vis à vis de la méthode des différences finies sont d'une part une mise en œuvre plus complexe et d'autre part des programmes de taille plus importante.

Cette méthode est parvenue à un tel degré de sophistication (maillage, optimisation de largeur de bande, …) qu'il n'est pas possible de la présenter ici. Outre le très grand nombre de publications, il existe beaucoup de livres qui lui sont consacrés [23 à 26]. Ainsi, dans l'ouvrage de Huebner [25] il y a un chapitre consacré à la lubrification. Par ailleurs la revue européenne des éléments finis a publié récemment en 2001, un numéro spécial sur le traitement des problèmes de lubrification par la méthode des éléments finis [26].

5.2 – CAS OU IL Y A RUPTURE DU FILM LUBRIFIANT

Si la géométrie et les conditions aux limites sont telles qu'il y a rupture du film lubrifiant, il est nécessaire de retenir le modèle développé dans le paragraphe 4.2. La

résolution générale de ces équations en particulier la détermination de conditions aux limites compatibles sur le débit et la pression reste un problème ouvert.

5.2.a - Conditions aux limites de Swift et Stieber, dites conditions aux limites de Reynolds

Lorsque les conditions de fonctionnement sont telles que le film lubrifiant se reforme au niveau des rainures d'alimentation la frontière Σ^- est déterminée ; seule Σ^+ demeure une inconnue du problème. Nous avons vu que la pression et sa dérivée normale s'annulent le long de cette frontière Σ^+.

$$p = \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma^+$$

Ces conditions avaient déjà été suggérées vers 1930, indépendamment par Swift [27], en considérant l'aspect stabilité, et Stieber [28] en étudiant la continuité du débit. Par la suite Cameron et Wood [29] ont montré que ces deux approches étaient identiques. La prise en compte de ces conditions, appelées très souvent conditions aux limites de Reynolds s'effectue directement si on utilise, associé à la méthode des différences finies, l'algorithme proposé par Christopherson, [30]. Il suffit de résoudre le système linéaire par une méthode itérative et d'annuler chaque terme de pression négatif dès que celui-ci est calculé. Bien que cet algorithme soit utilisé depuis fort longtemps en lubrification, la convergence n'a été démontré que récemment [31] ; il apparaît comme un cas particulier des méthodes de projection.

L'application de l'algorithme de Christopherson aux problèmes où la frontière de reconstitution du film Σ^- ne coïncide pas avec une rainure d'alimentation où la pression est donnée, conduit à la détermination d'une frontière Σ^- erronée. La continuité du débit massique n'est plus vérifiée. Toutefois, du fait de la complexité du problème, les conditions aux limites de Reynolds sont fréquemment utilisées et donnent pour un grand nombre de configurations des résultats comparables aux résultats expérimentaux sauf en ce qui concerne la valeur des débits.

5.2.b - Conditions aux limites de Gümbel

Historiquement, ce sont ces conditions qui ont été initialement introduites pour prendre en compte la rupture du film lubrifiant. En effet dès 1921, Gümbel [32] propose tout simplement de négliger dans la solution finale les pressions inférieures à la pression atmosphérique. Cette approche ne respecte bien évidemment pas la continuité du débit. En pratique, elle est utilisée dans le cas des paliers de faible largeur avec l'approximation du palier court, car elle conserve à l'équation de Reynolds son caractère linéaire et les résultats théoriques obtenus sont souvent proches des résultats expérimentaux.

6 – CALCUL DES DIFFERENTS PARAMETRES DANS LE CONTACT

6.1 – ORGANISATION DES CALCULS

Le calcul des caractéristiques d'un contact hydrodynamique s'effectue selon les étapes suivantes :

1) Choix d'un système d'axes permettant de tenir compte des symétries éventuelles.
2) Vitesse des surfaces dans le système d'axes choisi.
3) Equation donnant l'épaisseur du film.
4) Equation de Reynolds relative au contact étudié.

5) Conditions aux limites sur la pression.
6) Calcul de la pression dans le film (résolution de l'équation de Reynolds).
7) Calcul de la charge par intégration de la pression.
8) Calcul du frottement par intégration des contraintes de cisaillement sur les surfaces du contact ; l'intégration par partie permet généralement de simplifier les calculs.
9) Calcul du débit.
10) Calcul de la puissance dissipée dans le contact.

6.2 – La pression dans le film

La pression est obtenue par intégration de l'équation de Reynolds ou par minimisation de la fonctionnelle $J(p)$. Quelquefois, en plus des frontières qui séparent les zones actives et inactives, d'autres inconnues doivent être déterminées. On peut citer :

a) l'épaisseur h du film qui est donnée par la forme du contact. Pour les contacts lourdement chargés, les pressions dans le film peuvent déformer élastiquement ou même plastiquement les surfaces en regard ; il convient alors de tenir compte de ces déplacements pour le calcul de l'épaisseur du film.

b) La masse volumique qui dans le cas des fluides compressibles est reliée à la pression et à la température par la loi d'état du gaz.

c) La viscosité qui varie très sensiblement avec la température et, dans les contacts lourdement chargés, avec la pression. Remarquons que les hypothèses (9) et (10) ne permettent pas de prendre en compte la variation de la viscosité à travers l'épaisseur du film. Ainsi pour étudier les effets thermiques, il faudra utiliser une équation plus générale que l'équation de Reynolds.

6.3 – Action du fluide sur les parois du contact

L'action de contact $\vec{T}$, appelée habituellement le vecteur contrainte, exercée en un point M de la paroi, dépend uniquement du tenseur des contraintes en ce point et du vecteur normal $\vec{n}$:

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = \sum_{i=1}^{3} T_i \; \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{3} \sigma_{ij} \, n_j \; \vec{x}_i$$

où x_i représentent les coordonnées cartésiennes et n_j les composantes du vecteur normal en M orienté de la surface vers le fluide (normale extérieure).

Les éléments de réduction en un point C quelconque du torseur des actions de contact du fluide sur la surface S du contact seront donc :

résultante : $\vec{R} = \iint \vec{T}(M,\vec{n})\,ds$

moment en C : $M = \iint \overrightarrow{CM} \; \text{Ë} \; \vec{T}(M,\vec{n})\,ds$

Dans le cas de l'écoulement d'un fluide newtonien et sous les hypothèses de la lubrification hydrodynamique, la matrice représentative du tenseur des contraintes s'écrit :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -p & \mu\dfrac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \mu\dfrac{\partial u}{\partial y} & -p & \mu\dfrac{\partial w}{\partial y} \\ 0 & \mu\dfrac{\partial w}{\partial y} & -p \end{bmatrix}$$

Remarque : lorsque la surface S est un plan admettant $\vec{y}$ comme normale, l'intégration du champ de pression sur la surface permet de calculer la charge extérieure W que le contact peut supporter :

$$W = \int_S p \, ds$$

Ainsi en cordonnées cartésiennes pour un contact rectangulaire de dimensions LD ne comportant pas de zone de rupture du film la charge s'écrit :

$$W = \int_{-L/2}^{+L/2} \int_0^B p \, dx \, dz$$

De même, l'intégration des contraintes de cisaillement permet de déterminer les composantes selon les axes x et z de la force tangentielle (frottement) exercée par le fluide sur la paroi.

$$\begin{cases} F_1 = \int_S \mu \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0 \text{ ou } h} ds = \int_{-L/2}^{+L/2} \int_0^B \left[\pm \dfrac{h}{2} \dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\mu(U_2 - U_1)}{h} \right] dx \, dz \\ F_3 = \int_S \mu \left(\dfrac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0 \text{ ou } h} ds = \int_{-L/2}^{+L/2} \int_0^B \left[\pm \dfrac{h}{2} \dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\mu(W_2 - W_1)}{h} \right] dx \, dz \end{cases}$$

Le signe moins (-) correspond à la surface (1) pour $y = 0$; le signe plus (+) à la surface (2) pour $y = h$.

6.3.a - Remarque

Il est toujours possible d'intégrer par partie le terme de frottement dû au gradient de pression, ce qui simplifie considérablement les calculs dans le cas d'intégration numérique, en effet :

$$\int_0^B \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx = \left. \frac{hp}{2} \right|_0^B - \int_0^B \frac{p}{2} \frac{\partial h}{\partial x} dx$$

Le premier terme est connu, il dépend des conditions aux limites ; le second terme ne fait plus intervenir la dérivée de la pression mais celle de l'épaisseur du film qui est généralement connue sous forme analytique.

6.4 – LE DEBIT

Le débit utilisé en lubrification est :
- le débit massique M_j pour les fluides compressibles,
- le débit volumique Q_j pour les fluides incompressibles.

Ces débits sont calculés par intégration à partir des composantes de la vitesse dans le film. Il vient ainsi :

$$M_j = \int_{S_j} \rho u_j \, ds \qquad \text{avec} \quad j = 1 \text{ ou } 3$$

Dans cette relation u_j et M_j sont respectivement la composante de la vitesse et le débit massique dans la direction $\vec{x}_j$ et S_j la section, normale à l'axe $\vec{x}_j$, à travers laquelle est calculé le débit. Ce débit est positif s'il est orienté selon l'axe $\vec{x}_j$.

Pour les fluides incompressibles ρ = Cste et le débit volumique Q_j s'écrit :

$$Q_j = \int_{S_j} u_j \, ds$$

6.5 – PUISSANCE DISSIPEE

La puissance dissipée peut se calculer en intégrant la fonction dissipation dans le volume de fluide contenu dans le contact. Cependant ce calcul généralement complexe est très rarement effectué. Il est beaucoup plus simple de faire un bilan énergétique en écrivant que la puissance dissipée dans le contact est celle fournie au contact pour l'alimentation en lubrifiant et déplacer les surfaces en mouvement. Ce point sera explicité dans les chapitres suivants sur différents exemples.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FRENE J., NICOLAS D., DEGUEURCE B., BERTHE D., GODET M. "Lubrification hydrodynamique : paliers et butées", Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, n°72, EYROLLES 1990.

[2] NICOLAS D., FRENE J. "Les fondements de la lubrification hydrodynamique", guide thermique de l'hydraulique et de la pneumatique, 10ème édition, Janvier 1976, Energie fluide.

[3] FANTINO B., FRENE J., GODET M. "Condition d'utilisation de l'équation de Reynolds en mécanique des films minces visqueux", C.R.Ac.Sc. Paris t. 272, pp. 691-693, Mars 1971.

[4] PINKUS O., STERNLICHT B., "Theory of hydrodynamic lubrification", Mc Graw Hill Book Co N.Y. 1971.

[5] CAMERON A. "The principles of lubrication", Longmans 1966.

[6] LANGLOIS W.E. "Slow viscous flow", Mc Millan N.Y., 1964, pp. 204-221.

[7] DOWSON D., TAYLOR C.M. "Fundamental aspects of cavitation on bearings", 1st Leeds-Lyon Symposium, "Cavitation and related phenomena in lubrication", Ed. by Dowson, Godet and Taylor, Publ. by Mech. Eng. publications limited, pp. 15-26, 1975.

[8] COLE J.A., HUGHES C.J. "Oil flow and film extent in complete journal bearings". Proc. Inst. Mech. Eng., 170, pp. 499-510, 1956.

[9] DOWSON D., TAYLOR C.M. "Cavitation in bearings", Ann. Rev. Fluid. Mech., 11, pp. 35-60, 1979.

[10] FLOBERG L., JAKOBSSON B "The finite journal bearing considering vaporization", Trans. Chalmers, University, University Tech., 190, Göteborg, 1957.

[11] FLOBERG L. "On hydrodynamic lubrication with special reference to subcavity pressures and number of streamers in cavitation regions", Acta Poly. Scand., Mech. Eng., series 19, Stockholm, 1965.

[12] FLOBERG L. "Cavitation boundary conditions with regard to the number of streamers and tensile strength of the liquid", in ref. 10, pp. 31-35.

[13] ELROD H.G., ADAMS M.L. "A computer program for cavitation and starvation problems", in ref. 10, pp. 37-41.

[14] BAYADA G. "Modelisation of a cavitation problem". Euromech Colloquium n° 124 or Hydrodynamic lubrication of bearings, Torino - Italy, October 1979.

[15] GERMAIN P. "Mécanique des milieux continus", Masson, p. 47, Paris, 1972.

[16] NICOLAS D. "Les paliers hydrodynamiques soumis à un torseur de forces quelconques". Thèse de Docteur Ingénieur présentée devant l'Université Claude Bernard de Lyon, 1972.

[17] LEGRAS J. "Méthodes et techniques de l'analyse numérique". Dunod, Paris, 1971.

[18] FORSYTHE G.E., WASOF W.R. "Finite difference methods for partial differential equations". John Willey and Sons, Inc., New-York, 1960.

[19] SERVAES H. "Contribution à l'étude de la lubrification du coussinet complet de largeur finie". Publication des Sciences Appliquées de l'Université de Liège, n°4, 1967.

[20] FRENE J. "Régime d'écoulement non laminaire en films minces, application aux paliers lisses". Thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences Physiques présentée à l'Université Claude Bernard de Lyon, 1974.

[21] BOU-SAID B. "La lubrification à basse pression par la méthode des éléments finis. Application aux paliers". Thèse de Doctorat présentée à l'INSA de Lyon, Décembre 1985.

[22] BOOKER J.F., HUEBNER K.H. "Application of finite element methods to lubrication: an engineering approach", Trans. ASME, series F, vol. 94, n°4, 1972.

[23] ZIENKIEWICZ O.C. "The finite element method in structural and continuum mechanics". Mc Graw Hill, 1967.

[24] DHATT G. et TOUZOT G. "Une présentation de la méthode des éléments finis", Maloine S.A. Editeur-Paris, 1981.

[25] HUEBNER K.H. "The finite element method for Engineers", John Wiley, New-York, 1975.

[26] BONNEAU D. coordonateur "Traitement des problèmes de lubrification par la méthode des éléments finis", Revue européenne des éléments finis Vol.10 ; n°6-7 2001

[27] SWIFT H.W. "The stability of lubricating films in journal bearings". Proc. Inst. Civil Eng., 233, Pt 1, pp. 267-322, 1931.

[28] STIEBER W. "Das Schwimnlager", VDI, 1933, Berlin.

[29] CAMERON A., WOOK W.L. "The full journal bearing". Proc. Inst. Mech. Engrs., 161, pp. 59-64, 1949.

[30] CHRISTOPHERSON D.G. "A new mathematical method for the solution of oil film lubrication problems". Proc. Inter. Mech. Eng., Vol. 146, pp. 126-135, 1941.

[31] BAYADA G. "Inéquations variationnelles à conditions aux limites périodiques". Thèse présentée devant l'Université de Lyon I, 1972.

[32] GUMBEL L. "Verglieich der Ergebnisse der rechnerischen Behaudlung des lagerschmierungsproblem mit neuren Versuchsergebnissen", Monatsblätter d. Berlin, Bezirk V.D.I., 125-8, Sept. 1921.